

3. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

3.3. Integrales triples

Teorema de Fubini en \mathbb{R}^n

Sean $R \subset \mathbb{R}^p$ y $S \subset \mathbb{R}^q$, con $0 < p, q < n$ y $p + q = n$, rectángulos, $f : R \times S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable, y supongamos que para cada $\mathbf{x} \in R$ existe la integral

$$J(\mathbf{x}) = \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Entonces también existe la integral de $J(\mathbf{x})$ sobre R y se cumple que

$$\int_{R \times S} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_R J(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_R d\mathbf{x} \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Teorema de Fubini en \mathbb{R}^3

Cuando todas las funciones implicadas son integrables Riemann sobre los recintos correspondientes, si $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, se cumple que

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{[c, d] \times [e, f]} f(x, y, z) dy dz = \iint_{[a, b] \times [c, d]} dx dy \int_e^f f(x, y, z) dz$$

y aplicando el teorema de Fubini para integrales dobles:

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz$$

Obviamente, el teorema es también cierto con las variables de integración en cualquier orden.

Ejemplo

Calcula la integral triple de la función $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+x+y+z}}$ sobre $R = [0, 1]^3$.

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un recinto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ tiene contenido nulo en \mathbb{R}^3 , y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y continua en $\overset{\circ}{\Omega}$. Entonces f es integrable Riemann sobre Ω .

Integral triple sobre regiones seccionables

Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región **x —seccionable** si:

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in S_x \subset \mathbb{R}^2\}$$

Si para cada $x \in [a, b]$, la sección $S_x \subset \mathbb{R}^2$ tiene contenido nulo en \mathbb{R}^2 , la función f es integrable sobre S_x (respecto de y y z), y aplicando el teorema de Fubini se obtiene que:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{S_x} f(x, y, z) dy dz$$

Resultados análogos se obtienen para regiones **y —seccionables** y **z —seccionables**.

Ejemplos

1. Calcula la integral de $f(x, y, z) = 1$ sobre la esfera unidad (de centro el origen y radio 1).
2. Calcula la integral de $f(x, y, z) = (1 + x + y + z)^{-3}$ sobre el tetraedro V limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

Integral triple sobre regiones proyectables

Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región **xy –proyectable** si:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas con $\varphi_1 \leq \varphi_2$, y ∂S tiene contenido nulo en \mathbb{R}^2 . Aplicando el teorema de Fubini se obtiene que:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Resultados análogos se obtienen para regiones **xz –proyectables** e **yz –proyectables**.

Ejemplo

Calcula la integral de $f(x, y, z) = x$ sobre la región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 2$, y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x, y \geq 0$.

Cálculo de volúmenes mediante integrales triples

Cualquier región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se puede considerar seccionable:

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in S_x \subset \mathbb{R}^2\}$$

Aplicando el teorema de Fubini con la función $f(x, y, z) = 1$ y el principio de Cavalieri:

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{S_x} dy dz = \int_a^b A(S_x) dx = V(\Omega)$$

Por tanto, siempre que la integral exista, el volumen de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

Ejercicios

1. Calcula la integral de $f(x, y, z) = 4x - y + z$ sobre la región acotada limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 1$ y la superficie $z = 2 - x^2$.
2. Calcula la integral de $f(x, y, z) = x$ sobre la región acotada limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 2$, y el paraboloide $z = x^2 + y^2$, $x, y \geq 0$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. $5/3$.
2. $\frac{8\sqrt{2}}{15}$.